

一种基于运动学原理的单星对星无源测距定位方法^{*}

吴顺华^{**} 辛 勤 万建伟

国防科技大学 电子科学与工程学院一所信号处理室, 长沙 410073

摘要 在对卫星的无源定位跟踪研究中, 目标距离的获得是关键问题. 测角类的定位方法不能即时测距, 且存在收敛慢、精度低的不足. 根据运动学原理和卫星运动动力学方程, 推导无源测距方程并给出解法, 从而提出一种无源测距方法. 在此基础上, 结合测距分解观测模型, 给出基于运动学原理的单星对星无源测距定位方法. 仿真实例验证了测距方法及基于测距的定位跟踪方法的正确性和有效性. 与已有的基于几何定位原理的测角类定位方法相比, 该方法具有更高的定位精度和更快的收敛速度, 可实现快速定位.

关键词 无源定位 单观测站 无源测距 卫星定轨 运动学

采用被动方式工作的无源定位作为定位技术发展的重要方向和对现有探测系统的完善, 越来越受到人们的重视^[1,2]. 而单站无源定位系统因其隐蔽性强、探测距离远、部署灵活和设备简单等优点在电子对抗领域得到了人们的高度重视^[3]. 同时, 随着空间电子技术的发展, 空间信息获取及其对抗越来越受到人们关注, 而对卫星的监视和定轨跟踪是空间信息对抗中亟待解决的关键问题^[4-8]. 单星对星无源定位, 就是把无源侦察跟踪设备安装到卫星平台上, 利用单颗卫星平台截获目标卫星发射的通讯、测控和导航信号并进行处理, 进而对目标星进行定位和跟踪. 文献[9]对单星对星无源定位跟踪进行了初步探讨, 得出仅测角情况下可观测的结论.

在无源定位背景下, 观测站被动接收目标发射(或反射)的来波信号, 能够测量目标的方位信息而无法直接得到目标的距离信息, 所以, 如何获得目标的距离信息是单站无源定位的关键问题. 传统的单站无源定位一般采用只测向定位(bearing only, BO)方法^[10-12], 其本质是基于几何学原理的三角定位法. 其中, 文献[10]和文献[11]分别对只测向情

况下的可观测性和定位方法进行了研究. 文献[12]在单星对星无源定位中对BO定位方法进行了扩展. BO方法简单、容易实现, 但同时具有收敛速度慢、定位误差大等缺点^[13-15]. 为了克服这些缺陷, 文献[14]在滤波跟踪方法上进行改进, 提出修正增益的扩展Kalman滤波方法, 并基于此进行BO定位, 但是效果有限. 由于BO方法忽略了有用的相对运动信息, 从根本上制约了其定位跟踪的性能. 为此, 文献[16]提出了基于质点运动学的定位思路, 指出: 在目标辐射源和观测站之间具有相对运动时, 如果观测器不但可以观测到目标辐射源的来波到达角, 还可以通过干涉仪、红外或其他电子测量手段得到角度变化率或离心加速度参数, 就有可能得到辐射源的距离.

但是, 文献[16]的方法是在目标相对惯性系(如文献[16]中可以认为地面为惯性系)静止或作匀速直线运动的假设下得到的, 而卫星(不论何种轨道模式)运动是非常复杂的非线性变加速度运动^[17], 这种假设显然不再适用. 那么, 在单星对星无源定位中, 能否利用运动学原理进行测距定位呢? 如果能, 其定位性能又如何? 这就是本文要解

2008-04-01 收稿, 2008-06-08 收修稿

^{*} 武器装备预研基金资助项目(批准号: 9140A20010107KG0163)

^{**} E-mail: arthur860906@yahoo.com.cn

©1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

决的问题.

1 单星对星无源测距几何关系及卫星运动动力学方程

在以地心为原点的天球坐标系中, 把地球与人造卫星简化为两个质点, 并在地球万有引力作用下构成无摄动的二体系统. 此时, 可以将地心认为是惯性系, 卫星的运动轨道是一组以地球为中心的圆锥曲线族^[17], 如图 1 所示. 在 J2000.0 惯性系 $O_e X_e Y_e Z_e$ 下, 观测卫星 O 和目标卫星 T 的位置矢量分别为 $\mathbf{r}_O = [x_O(t) \ y_O(t) \ z_O(t)]^T$ 和 $\mathbf{r}_T = [x_T(t) \ y_T(t) \ z_T(t)]^T$. 观测坐标系 $O-XYZ$ 为以 O 为原点的直角坐标系, 其坐标轴与坐标系 $O_e-X_e Y_e Z_e$ 各轴分别平行且方向一致, 目标相对观测器的位置矢量为 $\mathbf{r} = [x(t) \ y(t) \ z(t)]^T = \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_O$. 观测卫星和目标卫星到地心的距离分别为 r_O 和 r_T , 目标卫星到观测卫星距离为 r .

根据二体运动规律及万有引力定律, 目标卫星和观测卫星动力学方程可以分别表示为^[17]

$$\ddot{\mathbf{r}}_T = -\mu \frac{\mathbf{r}_T}{r_T^3} \quad (1)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_O = -\mu \frac{\mathbf{r}_O}{r_O^3} \quad (2)$$

其中 $\ddot{\mathbf{r}}_T = [\ddot{x}_T(t) \ \ddot{y}_T(t) \ \ddot{z}_T(t)]^T$ 为目标卫星加速度矢量, $\ddot{\mathbf{r}}_O = [\ddot{x}_O(t) \ \ddot{y}_O(t) \ \ddot{z}_O(t)]^T$ 为观测卫星的加速度矢量, $r_T = \sqrt{x_T^2 + y_T^2 + z_T^2}$, $r_O = \sqrt{x_O^2 + y_O^2 + z_O^2}$, μ 为 Kepler 常数.

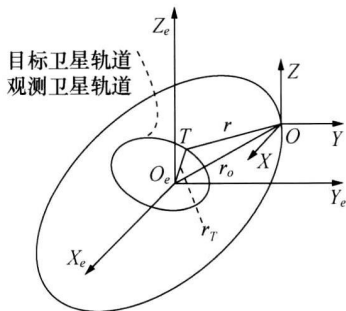


图 1 单星对星定位跟踪系统几何关系

2 基于运动学原理的单星对星无源测距方程

目标 T 在以观测器 O 为原点的直角坐标系 $O-XYZ$ 中位置为 $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$, 其对应的极坐标表示为 (r, β, ϵ) , 如图 2 所示.

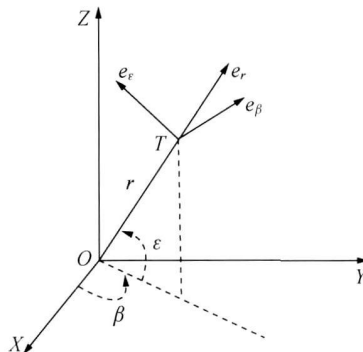


图 2 观测器与目标相对运动示意图

令 $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\beta$, $\mathbf{e}_\epsilon$ 分别表示 r , β , ϵ 增加方向上的正交单位向量, 有

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\epsilon \\ \sin\beta\cos\epsilon \\ \sin\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \Psi \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{e}_\beta = \begin{bmatrix} \cos(0.5\pi + \beta) \\ \sin(0.5\pi + \beta) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_\epsilon = \begin{bmatrix} \cos(\pi + \beta)\cos(0.5\pi - \epsilon) \\ \sin(\pi + \beta)\cos(0.5\pi - \epsilon) \\ \sin(0.5\pi - \epsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\beta\sin\epsilon \\ -\sin\beta\sin\epsilon \\ \cos\epsilon \end{bmatrix} \quad (5)$$

以观测器 O 为原点建立坐标系 $O-\mathbf{e}_\beta\mathbf{e}_\epsilon\mathbf{e}_r$, 则 $\mathbf{e}_\beta$, $\mathbf{e}_\epsilon$, $\mathbf{e}_r$ 分别表示相对运动的水平切向、垂直切向和径向.

2.1 单站无源测距运动学原理

坐标系 $O-\mathbf{e}_\beta\mathbf{e}_\epsilon\mathbf{e}_r$ 中, 目标 T 的相对运动可表示为

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \quad (6)$$

分别对位置向量 $\mathbf{r}$ 求一阶导数与二阶导数, 可得目标 T 的相对速度和相对加速度矢量分别为

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d(\mathbf{r}\mathbf{e}_r)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}\mathbf{e}_r + r\dot{\epsilon}\mathbf{e}_\epsilon + r\dot{\beta}\cos\epsilon\mathbf{e}_\beta \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d(\dot{\mathbf{r}})}{dt} = & (\ddot{r} - r\dot{\beta}^2\cos^2\epsilon - r\dot{\epsilon}^2)\mathbf{e}_r + \\ & (r\ddot{\epsilon} + 2\dot{r}\dot{\epsilon} - r\dot{\beta}^2\cos\epsilon\sin\epsilon)\mathbf{e}_\epsilon + \\ & (r\dot{\beta}\cos\epsilon + 2\dot{r}\dot{\beta}\cos\epsilon + 2r\dot{\beta}\dot{\epsilon}\sin\epsilon)\mathbf{e}_\beta \end{aligned} \quad (8)$$

由(8)式可知, 目标相对观测器的径向加速度 a_r 为

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\beta}^2\cos^2\epsilon - r\dot{\epsilon}^2 \quad (9)$$

在直角坐标系 $O-XYZ$ 中, 目标的相对径向加速度 a_r 可表示为

$$a_r = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_r = \ddot{x}\cos\beta\cos\epsilon + \ddot{y}\sin\beta\cos\epsilon + \ddot{z}\sin\epsilon \quad (10)$$

其中 $\mathbf{a}$ 表示目标相对于观测器的加速度矢量. 将(9)式代入(10)式得到

$$r = \frac{\ddot{r} - (\ddot{x}\cos\beta\cos\epsilon + \ddot{y}\sin\beta\cos\epsilon + \ddot{z}\sin\epsilon)}{\dot{\beta}^2\cos^2\epsilon + \dot{\epsilon}^2} \quad (11)$$

其中 $\ddot{x} = \ddot{x}_T - \ddot{x}_O$, $\ddot{y} = \ddot{y}_T - \ddot{y}_O$, $\ddot{z} = \ddot{z}_T - \ddot{z}_O$; $\ddot{x}_T$, $\ddot{y}_T$, $\ddot{z}_T$ 和 $\ddot{x}_O$, $\ddot{y}_O$, $\ddot{z}_O$ 分别表示目标 T 和观测器 O 的加速度在直角坐标系各坐标轴上分量. 由(11)式, 假设目标加速度始终为零(静止或作匀速运动), 如果观测器测得参数 β , $\dot{\beta}$, ϵ , $\dot{\epsilon}$, $\dot{r}$, 则可以对目标进行测距.

2.2 单星对星无源测距方程

由(1)式可知, 目标卫星加速度不为零, 且其距离的任意阶导数都不为零, 运动形式为无穷阶, 卫星作复杂的非线性运动^[17]. 同时, 观测站卫星的轨道高度通常要高于目标卫星, 因此通常观测卫星加速度比目标卫星加速度要小. 综合上述情况, 单颗卫星对卫星目标的无源定位系统不符合目标加速度为零的假设, 也不可目标加速度近似为零, 因此不能直接运用(11)式进行测距.

在 J2000.0 惯性系下观测卫星加速度矢量为 $\ddot{\mathbf{r}}_O$, 目标卫星加速度矢量为 $\ddot{\mathbf{r}}_T$, 则目标卫星相对于观测卫星的加速度矢量 $\mathbf{a}$ 为

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}_T - \ddot{\mathbf{r}}_O \quad (12)$$

若目标卫星相对于观测卫星的方位角和俯仰角分别为 β , ϵ , 则基于观测点的目标方位可以表示为矢量 $\mathbf{e}_r$, 如(3)式. 目标星相对于观测星的径向加速度 a_r 为

$$a_r = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_r = (\ddot{\mathbf{r}}_T - \ddot{\mathbf{r}}_O) \cdot \mathbf{e}_r = \ddot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{e}_r - \ddot{\mathbf{r}}_O \cdot \mathbf{e}_r \quad (13)$$

上式将 a_r 分解为目标加速度在 $\mathbf{e}_r$ 上投影及观测器加速度在 $\mathbf{e}_r$ 方向上投影两部分. 根据(2)式

$$\ddot{\mathbf{r}}_O \cdot \mathbf{e}_r = \frac{-\mu(\mathbf{r}_O \cdot \mathbf{e}_r)}{(x_O^2 + y_O^2 + z_O^2)^{3/2}} = -\mu \frac{r_{Op}}{r_O^3} \quad (14)$$

其中

$$r_{Op} = (\mathbf{r}_O \cdot \mathbf{e}_r) = (\xi x_O + \psi y_O + \zeta z_O) \quad (15)$$

目标相对于地心的位置矢量 $\mathbf{r}_T$ 及目标到观测器的距离 r 可分别表示为:

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r} + \mathbf{r}_O = [x + x_O \quad y + y_O \quad z + z_O]^T \quad (16)$$

$$r = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r \quad (17)$$

则目标卫星到地心的距离为

$$\begin{aligned} r_T &= \left[(x + x_O)^2 + (y + y_O)^2 + (z + z_O)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left[r^2 + r_O^2 + 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_O \right]^{1/2} = \left[r^2 + r_O^2 + 2rr_{Op} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (18)$$

根据(1), (16)式, 目标加速度在 $\mathbf{e}_r$ 上投影为

$$\ddot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{e}_r = \frac{\mu}{r_T^3} \mathbf{r}_T \cdot \mathbf{e}_r = \frac{-\mu(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{r}_O \cdot \mathbf{e}_r)}{(r^2 + r_O^2 + 2rr_{Op})^{3/2}} \quad (19)$$

又根据(17), (15)式, 有

$$\ddot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{e}_r = \frac{-\mu(r + r_{Op})}{(r^2 + r_O^2 + 2rr_{Op})^{3/2}} \quad (20)$$

将(14), (20)式代入(13)式中, 得到

$$a_r = \frac{-\mu(r + r_{Op})}{(r^2 + r_O^2 + 2rr_{Op})^{3/2}} + \mu \frac{r_{Op}}{r_O^3} \quad (21)$$

根据(21)式及运动学原理公式(9), 有

$$\frac{-\mu(r + r_{Op})}{(r^2 + r_O^2 + 2rr_{Op})^{3/2}} + \mu \frac{r_{Op}}{r_O^3} =$$

$$\ddot{r} - r(\dot{\beta}\cos\epsilon)^2 - r(\dot{\epsilon})^2$$

在单星对星无源测距定位系统中, 观测卫星的位置信息已知, 如果能够通过测量得到目标角度 (β, ϵ) 、角度变化率 $(\dot{\beta}, \dot{\epsilon})$ 及离心加速度 $\ddot{r}$ 等信息, 则 r_0 , $r_{\alpha p}$, β , $\dot{\beta}$, ϵ , $\dot{\epsilon}$, $\ddot{r}$ 均为已知量, 上式为目标卫星到观测卫星相对距离 r 的一元方程. 将(22)式整理得

$$\frac{-\mu(r+r_{\alpha p})}{(r^2+r_0^2+2rr_{\alpha p})^{3/2}}+r[(\dot{\beta}\cos\epsilon)^2-(\dot{\epsilon})^2]=\left[\ddot{r}-\mu\frac{r_{\alpha p}}{r_0^3}\right] \quad (23)$$

(23)式即为单星对星无源测距方程.

3 测距方程虚假解剔除及单次测距误差分析

3.1 基于层次聚类法的测距虚假解剔除

(23)式是一个一元非线性方程, 其解不唯一, 通常情况下, 在正实数域内有一到三个解. 在这些解中, 有且只有一个解是目标卫星到观测卫星的真实距离, 称这个解为真解, 其他解为虚假解. 根据卫星轨道理论, 轨道面为通过地心(J2000.0坐标系原点)的平面, 轨道上任意一点以及其速度矢量都在这个平面内. 假设目标卫星轨道与观测卫星轨道不共面, 如果通过计算可以得到目标卫星轨道所在的平面, 那么方程(23)的所有解中, 其确定的目标位置点落在目标轨道平面内(不考虑测量误差情况)或距目标轨道面最近(考虑测量误差情况)的即为真解.

设 $t=i$ 时刻测距方程(23)在正实数域的解为 $\{r_{ij} \mid j=1, 2, \dots, m_i\}$, 其中真解表示为 $r_{i,r}$. 在地心坐标系中, 每个距离解对应的目标位置矢量为

$$\mathbf{r}_{T,ij} = \mathbf{r}_0 + r_{ij}\mathbf{e}_r = [x_{T,ij} \ y_{T,ij} \ z_{T,ij}]^T \quad (24)$$

目标卫星相对观测站的水平切向速度 $V_{h,ij}$ 和垂直切向速度 $V_{v,ij}$ 分别为

$$V_{h,ij} = r_{ij}\dot{\beta}\cos\epsilon \quad (25)$$

$$V_{v,ij} = r_{ij}\dot{\epsilon} \quad (26)$$

设目标相对观测站的径向速度为 $\dot{r}$, 则目标卫星的速

度矢量 $\dot{\mathbf{r}}_{T,ij}$ 为

$$\dot{\mathbf{r}}_{T,ij} = \dot{\mathbf{r}}_0 + [\mathbf{e}_r \ \mathbf{e}_\beta \ \mathbf{e}_\epsilon] \begin{bmatrix} \dot{r} \\ V_{th,ij} \\ V_{tv,ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{T,ij} \\ \dot{y}_{T,ij} \\ \dot{z}_{T,ij} \end{bmatrix}^T \quad (27)$$

由 $\mathbf{r}_{T,ij}$ 和 $\dot{\mathbf{r}}_{T,ij}$ 可以确定一个过地心原点的平面 $a_{ij}x + b_{ij}y = z$, 记做平面模式 $p_{ij} = (a_{ij}, b_{ij})$, 且有

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{z_{T,ij}\dot{y}_{T,ij} - \dot{z}_{T,ij}y_{T,ij}}{x_{T,ij}\dot{y}_{T,ij} - \dot{x}_{T,ij}y_{T,ij}} \\ b_{ij} = \frac{x_{T,ij}\dot{z}_{T,ij} - \dot{x}_{T,ij}z_{T,ij}}{x_{T,ij}\dot{y}_{T,ij} - \dot{x}_{T,ij}y_{T,ij}} \end{cases} \quad (28)$$

若通过观测可得到目标卫星的角度及其变化率、相对径向速度和离心加速度, 在 $t=1, 2, \dots, n$ 的前 n 个时刻, 由(23)式可得到目标到观测站的距离解共 $\sum_{i=1}^n m_i$ 个, 再根据(28)式得到相同数量过地心原点的平面. 这当中, n 个距离真解对应的平面与目标卫星轨道面一致或很近似, 在二维模式平面中模式点 $p_{ij,r} = (a_{ij,r}, b_{ij,r})$ 集中在一个很小的范围内, 而其他虚假距离解对应的平面模式点在模式平面内则相对分散. 对平面模式 p_{ij} 进行层次法聚类^[18], 可以确定近似的目标卫星轨道平面 $\bar{p} = (\bar{a}, \bar{b})$, 再由平面 $\bar{p}$ 根据距离最近原则得到测距方程的真解.

基于层次聚类法的测距虚假解剔除具体算法步骤如下:

(1) 在 $t=1, 2, \dots, n$ 时刻解测距方程得到 $\{r_{ij} \mid i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m_i\}$; 按照(24)式及(27)式计算对应的位置矢量 $\mathbf{r}_{T,ij}$ 和速度矢量 $\dot{\mathbf{r}}_{T,ij}$, 再根据(28)式计算每个距离解对应的平面模式 $p_{ij} = (a_{ij}, b_{ij})$.

(2) 设共有平面模式 N 个, 重新排序为 $\{p_k \mid k=1, \dots, N\}$, 令 $l=0$, 每个模式自成一类, 即 $G_k^{(0)} = \{p_k\} (k=1, \dots, N)$, 类数 $M=N$.

(3) 计算各类间的距离 D_{ij} , 得到一个 $M \times M$ 维矩阵, 找出其中最小值并将对应的两类合并, 于是产生新的聚类 $G_1^{(l+1)}, G_2^{(l+1)}, \dots$, 令 $l=l+1$, $M=M-1$.

(4) 检查最大类中模式个数 $N_{\max}$, 如果有

$N_{\max} < n$, 则转至上一步.

(5) 计算聚类结果中最大类(含模式数最多)的类中心, 得到目标卫星的近似轨道平面 $\bar{p} = (\bar{a}, \bar{b})$.

(6) $n = n + 1$, 解 $t = t_n$ 时刻测距方程得到的多个距离 $\{r_{nj} \mid j = 1, 2, \dots, m_n\}$, 计算距离值对应的目标卫星位置点 $\{r_{T,nj} \mid j = 1, 2, \dots, m_n\}$. 距平面 $\bar{p} = (\bar{a}, \bar{b})$ 最近的点 $r_{T,nr}$ 对应的距离值即为真解 r_{nr} , 其他为虚假解.

(7) 近似轨道平面 $\bar{p} = (\bar{a}, \bar{b})$ 的更新. 根据 r_{nr} 对应的位置矢量 $r_{T,nr}$ 及速度矢量 $\dot{r}_{T,nr}$, 确定平面 $p_n = (a_n, b_n)$, $\bar{p} = ((n-1)\bar{p} + p_n)/n$. 转到上一步, 直至结束.

3.2 单次测距误差分析

观测参数 $\beta, \dot{\beta}, \epsilon, \dot{\epsilon}, \dot{r}$ 都含有误差, 假设这些误差之间相互独立且都是零均值的, 它们的方差分别为 $\sigma_\beta, \sigma_{\dot{\beta}}, \sigma_\epsilon, \sigma_{\dot{\epsilon}}, \sigma_{\dot{r}}$. 将(23)式两边对这些参数分别求偏微分并整理得到

$$\frac{\partial r}{\partial \beta} = \frac{Nm}{Dm} (x_o \cos \beta \cos \epsilon - y_o \sin \beta \cos \epsilon) \quad (29)$$

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{\beta}} = \frac{-2rr_T^5 \dot{\beta} \cos^2 \epsilon}{Dm} \quad (30)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \epsilon} = \frac{2rr_T^5 \dot{\beta}^2 \sin \epsilon \cos \epsilon}{Dm} + \frac{Nm(-x_o \sin \beta \sin \epsilon - y_o \cos \beta \sin \epsilon + z_o \cos \epsilon)}{Dm} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{\epsilon}} = \frac{-2rr_T^5 \dot{\epsilon}}{Dm} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{r}} = \frac{r_T^5}{Dm} \quad (33)$$

其中

$$Nm = \mu \left(r_T^2 - 3r(r + r_{\alpha p}) - \frac{r_T^3}{r_o} \right) \quad (34)$$

$$Dm = r_T^5 \left((\dot{\beta} \cos \epsilon)^2 + \dot{\epsilon}^2 \right) + 3\mu(r + r_{\alpha p})^2 - \mu r_T^2 \quad (35)$$

综合(29)–(33)式, 单次测距的误差公式和误差方差公式分别为

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial r}{\partial \dot{\beta}} \delta \dot{\beta} + \frac{\partial r}{\partial \epsilon} \delta \epsilon + \frac{\partial r}{\partial \dot{\epsilon}} \delta \dot{\epsilon} + \frac{\partial r}{\partial \dot{r}} \delta \dot{r} \quad (36)$$

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \beta} \right)^2 \sigma_\beta^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \dot{\beta}} \right)^2 \sigma_{\dot{\beta}}^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \epsilon} \right)^2 \sigma_\epsilon^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \dot{\epsilon}} \right)^2 \sigma_{\dot{\epsilon}}^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \dot{r}} \right)^2 \sigma_{\dot{r}}^2 \quad (37)$$

这里假设已知观测卫星的准确位置, 若需考虑 r_o 的误差, 也可以求偏微分得其对测距误差的影响.

4 多次定位模型及测距分解滤波方法

上述测距方法可以快速确定目标卫星到观测卫星的距离, 任一测距结果结合方位角、俯仰角以及观测卫星的位置矢量可独立地确定目标卫星的位置, 但是由于各定位参数的测量精度有限, 为了获得更好的定位结果, 有必要对多个时刻的定位结果进行统计滤波处理. 其中最常用的递推滤波方法是扩展 kalman 滤波.

4.1 目标卫星运动状态方程

选取目标卫星的位置矢量和速度矢量作为状态变量 $X_T(t) = [r_T^T \quad \dot{r}_T^T]^T$, 则其运动微分方程为

$$\dot{X}_T(t) = F(X_T(t)) = [\dot{r}_T^T \quad \ddot{r}_T^T]^T \quad (38)$$

其中 $\dot{r}_T = [\dot{x}_T(t) \quad \dot{y}_T(t) \quad \dot{z}_T(t)]^T$, $F(\cdot)$ 表示非线性变换. 对卫星运动微分方程(38)离散化, 得到

$$X_T(k+1) - X_T(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(X_T(t)) dt \quad (39)$$

将 $F(X_T(t))$ 在 t_k 附近展开为 Taylor 级数

$$F(X_T(t)) \approx F(X_T(k)) + A(X_T(k)) \cdot (t - t_k) + F(X_T(k)) \circ (t - t_k)^2 \quad (40)$$

其中 $A(X_T(k)) = \left. \frac{\partial F(X_T(t))}{\partial X^T} \right|_{t=t_k}$, 有

$$A(X_T(k)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{r}_T}{\partial r_T} & \frac{\partial \ddot{r}_T}{\partial \dot{r}_T} \\ \frac{\partial \ddot{r}_T}{\partial r_T} & \frac{\partial \dddot{r}_T}{\partial \dot{r}_T} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 010 \\ 0 & 0 & 0 & 001 \\ \frac{\mu}{r_T^3} \left(\frac{3x_T^2}{r_T^2} - 1 \right) & \frac{3\mu x_T y_T}{r_T^5} & \frac{3\mu x_T z_T}{r_T^5} & 000 \\ \frac{3\mu y_T x_T}{r_T^5} & \frac{\mu}{r_T^3} \left(\frac{3y_T^2}{r_T^2} - 1 \right) & \frac{3\mu y_T z_T}{r_T^5} & 000 \\ \frac{3\mu z_T x_T}{r_T^5} & \frac{3\mu z_T y_T}{r_T^5} & \frac{\mu}{r_T^3} \left(\frac{3z_T^2}{r_T^2} - 1 \right) & 000 \end{bmatrix} \quad (41)$$

将(40)式代入(39)式, 得到状态递推方程为

$$\mathbf{X}_T(k+1) = \mathbf{X}_T(k) + \mathbf{F}(\mathbf{X}_T(k)) \cdot T + \mathbf{A}(\mathbf{X}_T(k)) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}_T(k)) \cdot T^2/2 + \mathbf{W}(k) \quad (42)$$

上式中, $\mathbf{W}(k)$ 表示对状态方程线性化引入的误差矢量, 且 $\mathbf{E}[\mathbf{W}(k)\mathbf{W}(k)^T] = \mathbf{Q}$ 为状态误差矩阵. 根据状态转移矩阵的定义及性质^[19], 可得

$$\Phi(k+1/k) = \mathbf{I}_{6 \times 6} + \mathbf{A}(\mathbf{X}_T(k/k)) \cdot T + [\mathbf{A}^2(\mathbf{X}_T(k/k)) + \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X}_T(k/k))] \cdot T^2/2 \quad (43)$$

其中 $\mathbf{I}_{6 \times 6}$ 为 6 维单位矩阵, 变量 T 为采样间隔, 下标 _{T} 表示与目标相关量.

4.2 测距分解观测模型

通过测距计算得到 $t = t_k$ 时刻目标卫星到观测卫星的距离 r_k 后, 根据(24)式可以得到 J2000 0 坐标系中目标卫星的位置为

$$\mathbf{Z}(k) = \mathbf{r}_{\alpha k} + r_k \mathbf{e}_{\beta k} = \begin{bmatrix} x_{\alpha k} + r_k \cos \beta_k \cos \epsilon_k \\ y_{\alpha k} + r_k \sin \beta_k \cos \epsilon_k \\ z_{\alpha k} + r_k \sin \epsilon_k \end{bmatrix} \quad (44)$$

则测量方程为

$$\mathbf{Z}(k) = [\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_{3 \times 3}] \mathbf{X}_T(k) + \begin{bmatrix} N_x(k) \\ N_y(k) \\ N_z(k) \end{bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{X}_T(k) + \mathbf{N}(k) \quad (45)$$

其中 $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 表示 3 维单位矩阵, $\mathbf{0}_{3 \times 3}$ 表示 3 维零矩

阵, $\mathbf{H} = [\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_{3 \times 3}]$ 为测量矩阵, $\mathbf{N}(k) = [N_x(k) \quad N_y(k) \quad N_z(k)]^T$ 为测量误差, 根据(44)式有

$$N_x(k) = \frac{\partial x_T(k)}{\partial r_k} \hat{r}_k + \frac{\partial x_T(k)}{\partial \beta_k} \hat{\beta}_k + \frac{\partial x_T(k)}{\partial \epsilon_k} \hat{\epsilon}_k = (\cos \beta_k \cos \epsilon_k) \hat{r}_k - (r_k \sin \beta_k \cos \epsilon_k) \hat{\beta}_k - (r_k \cos \beta_k \sin \epsilon_k) \hat{\epsilon}_k \quad (46)$$

$$N_y(k) = \frac{\partial y_T(k)}{\partial r_k} \hat{r}_k + \frac{\partial y_T(k)}{\partial \beta_k} \hat{\beta}_k + \frac{\partial y_T(k)}{\partial \epsilon_k} \hat{\epsilon}_k = (\sin \beta_k \cos \epsilon_k) \hat{r}_k + (r_k \cos \beta_k \cos \epsilon_k) \hat{\beta}_k - (r_k \sin \beta_k \sin \epsilon_k) \hat{\epsilon}_k \quad (47)$$

$$N_z(k) = \frac{\partial z_T(k)}{\partial r_k} \hat{r}_k + \frac{\partial z_T(k)}{\partial \epsilon_k} \hat{\epsilon}_k = (\sin \epsilon_k) \hat{r}_k + (r_k \cos \epsilon_k) \hat{\epsilon}_k \quad (48)$$

则在零均值 Gauss 白噪声条件下, 测量误差方差矩阵 $\mathbf{R}(k)$ 为

$$\mathbf{R}(k) = \mathbf{E}[\mathbf{N}(k)\mathbf{N}^T(k)] \quad (49)$$

4.3 测距分解的定位跟踪滤波算法

通过上述系统状态方程及观测方程的建立, 结合前面给出的测距方法, 可以对单星对星无源定位进行统计递推滤波. 下面给出基于扩展 Kalman 滤波的具体算法过程:

(1) 初始化: 使用第 3 节方法, 对前 n (通常 $n \in [3, 6]$) 个时刻的测距方程解对应的平面模式进行聚类分析, 得到近似轨道平面 $\bar{p} = (\bar{a}, \bar{b})$, 并设定 $k=1$ 时刻的状态滤波初始值 $\mathbf{X}_T(1)$ 及初始误差阵 $\mathbf{P}(1/1)$ (也可由(24), (27)式计算推导得到).

(2) 状态预测: $k=k+1$, 根据(42), (43)式对 k 时刻的状态进行外推, 得到状态预测值 $\mathbf{X}_T(k/k-1)$ 及预测误差阵 $\mathbf{P}(k/k-1)$.

(3) 测量值的获得: 利用 k 时刻测距方程的解及 $\bar{p} = (\bar{a}, \bar{b})$ 确定距离真解 r_k , 距离分解, 根据(44), (49)式得到测量值 $\mathbf{Z}(k)$ 及其误差矩阵 $\mathbf{R}(k)$.

(4) 状态滤波: 根据测量值导出新息, 对预测值进行滤波修正, 得到 k 时刻状态滤波值 $\mathbf{X}_T(k/k)$ 及滤波方差阵 $\mathbf{P}(k/k)$.

(5) 近似轨道平面 $\bar{p} = (\bar{a}, \bar{b})$ 的更新: 根据(28)

式, $X_T(k/k)$ 确定平面 $p_k = (a_k, b_k)$, 则 $\bar{p} = ((n-1)\bar{p} + p_n)/n$. 转步骤 2).

对于考虑卫星轨道摄动的情况, 上述测距定位跟踪方法依然适用, 只要将卫星的动力学方程作相应调整即可. 通常, 地球非球形引力摄动对轨道的影响要远远大于其他摄动, 并且二阶带谐项(J_2 项)是地球非球形摄动的主要成分(为地球球形引力的 10^{-3} 量级, 其他项都在 10^{-6} 量级以下)^[17]. 下面对考虑 J_2 项摄动的情况进行简单推导说明.

目标卫星摄动函数 R_T 为

$$R_T = -\frac{\mu}{r_T} \left(\frac{R_e}{r_T} \right)^2 J_2 \left(\frac{3}{2} \sin \varphi_T - \frac{1}{2} \right) \quad (50)$$

其中 $R_e = 6378136.0 \text{ m}$ 为地球平均赤道半径, $J_2 = 1.0826261 \times 10^{-3}$ 为地球引力场二阶球谐系数, φ_T 为目标卫星的地心纬度, 有

$$\varphi_T = \tan^{-1} \left(\frac{z_T}{\sqrt{x_T^2 + y_T^2}} \right) \quad (51)$$

则摄动条件下目标卫星的动力学方程为

$$\ddot{\mathbf{r}}_T = -\mu \frac{\mathbf{r}_T}{r_T^3} + \frac{\partial R_T}{\partial \mathbf{r}_T} = -\mu \frac{\mathbf{r}_T}{r_T^3} + \frac{\mu J_2}{r_T^3} \left(\frac{R_e}{r_T} \right)^2 \begin{bmatrix} x_T \left[7.5 \frac{z_T^2}{r_T^2} - 1.5 \right] \\ y_T \left[7.5 \frac{z_T^2}{r_T^2} - 1.5 \right] \\ z_T \left[7.5 \frac{z_T^2}{r_T^2} - 4.5 \right] \end{bmatrix} \quad (52)$$

同理, 可得摄动条件下观测卫星的动力学方程为

$$\ddot{\mathbf{r}}_O = -\mu \frac{\mathbf{r}_O}{r_O^3} + \frac{\mu J_2}{r_O^3} \left(\frac{R_e}{r_O} \right)^2 \begin{bmatrix} x_O \left[7.5 \frac{z_O^2}{r_O^2} - 1.5 \right] \\ y_O \left[7.5 \frac{z_O^2}{r_O^2} - 1.5 \right] \\ z_O \left[7.5 \frac{z_O^2}{r_O^2} - 4.5 \right] \end{bmatrix} \quad (53)$$

将(52), (53)式代替(1), (2)式, 则(14), (20)式相应变为

$$\ddot{\mathbf{r}}_O \circ \mathbf{e}_r = -\mu \frac{r_{O,p}}{r_O^3} + C_1(\mathbf{r}_O) \quad (54)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_T \circ \mathbf{e}_r = \frac{-\mu(r + r_{O,p})}{(r^2 + r_O^2 + 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{O,p})^{3/2}} + C_2(\mathbf{r}_T) \quad (55)$$

其中 $C_1(\mathbf{r}_O)$, $C_2(\mathbf{r}_T)$ 分别为观测卫星位置 $\mathbf{r}_O$ 和目标卫星位置 $\mathbf{r}_T$ 的函数. 又根据

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r} + \mathbf{r}_O = r\mathbf{e}_r + \mathbf{r}_O \quad (56)$$

将(55)式进一步表示为

$$\ddot{\mathbf{r}}_T \circ \mathbf{e}_r = \frac{-\mu(r + r_{O,p})}{(r^2 + r_O^2 + 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{O,p})^{3/2}} + C_2(r, \mathbf{e}_r, \mathbf{r}_O) \quad (57)$$

将(54), (57)式代入(13)式, 并根据(9)式得到

$$\frac{-\mu(r + r_{O,p})}{(r^2 + r_O^2 + 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{O,p})^{3/2}} + \mu \frac{r_{O,p}}{r_O^3} = \ddot{r} - r(\dot{\beta} \cos \epsilon)^2 - r(\dot{\epsilon})^2 - C_1(\mathbf{r}_O) - C_2(r, \mathbf{e}_r, \mathbf{r}_O) \quad (58)$$

上式为目标卫星到观测卫星相对距离 r 的一元方程, 是考虑 J_2 项摄动条件下的测距方程.

将(52), (53)式代替(1), (2)式组成新的状态矢量, 按照 4.1 节重新进行推导可得到摄动条件下系统状态递推方程; 再结合摄动条件下测距方程(58), 根据本文方法, 即可以实现考虑 J_2 摄动项时的单星对星无源测距定位.

5 仿真实验

为了验证前面推导的正确性及基于运动学原理的单星对星无源测距定位方法的性能, 进行以下仿真实验. 场景: 目标星轨道根数($a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \omega_1, \tau_1$)为(7500 km, 0, $\pi/4, \pi/3, 3\pi/5, 500$), 观测星轨道根数($a_2, e_2, i_2, \Omega_2, \omega_2, \tau_2$)为(22000 km, 0.2, $2\pi/5, \pi/6, \pi/3, 0$), 角度观测误差分为 1 mrad, 方位角变化率和俯仰角变化率观测误差为 0.01 mrad, 径向速度观测误差为 10 m/s, 离心加速度观测误差为 0.05 m/s^2 , 初始状态误差为(500 km, 500 km, 500 km, 1 km/s, 1 km/s, 1 km/s).

仿真 1: 基于上述场景, 对本文提出的基于运动学原理的无源测距方法进行验证: 根据测距方程

和基于层次聚类的测距虚假解剔除方法(3.1节), 逐次得到每个时刻的目标距离。

仿真 2: 基于上述同样场景, 对基于测距结果的测距分解定位跟踪算法(4.3节)进行验证。采用 3 种定位方法: 本文基于运动学原理的定位方法、已有的仅测角(BO)定位法和测角及其变化率(bearing change rate, BCR)定位法, 分别进行定位跟踪。由于本文方法根据径向加速度(radial accelerate, RA)公式推导得到, 为叙述方便, 下面将本文方法称为 RA 定位法。

为了保证数据的通用性和可靠性, 本文利用 STK6.0 根据给定的轨道根数产生 J2000.0 惯性系下卫星星历, 再由 Matlab7.0 读取并进行定位仿真。STK6.0 场景时间间隔 10 s, Matlab7.0 采样间隔 10 s, 仿真点数为 $N=500$ 。仿真结果取 $M=100$ 次 Monte-Carlo, 定位跟踪评价指标采用误差均方根(RMSE)、平均误差均方根(ARMSE)、收敛时刻 t_c 。

$$RMSE_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [(x_k^i - \hat{x}_k)^2 + (y_k^i - \hat{y}_k)^2 + (z_k^i - \hat{z}_k)^2]}{N}} \quad (59)$$

$$ARMSE = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M RMSE_k \quad (60)$$

$$RMSE|_{k=t_c} = 0.1RMSE_0 \quad (61)$$

仿真 1 结果如图 3、图 4 所示。图 3 中“×”表示通过测距得到的平面模式及其聚类结果(类中心), “○”表示准确的目标轨道平面, 其值为 $(-0.866, 0.500)$ 。对前 6 个时刻的平面模式聚类, 得到的近似目标轨道平面为 $\bar{p} = (-0.8632, 0.5002)$ 。仿真 2 结果如图 5 及表 1 所示。

表 1 仿真结果评价指标对比

方法	RMSE 收敛值/km	ARMSE/m	t_c /s
BO	约 30	248579.16	1940
BCR	约 20	191506.88	1510
RA	约 7	15838.64	40

上述仿真结果和指标对比, 验证了本文提出的无源测距方法及基于测距分解的定位跟踪方法的正

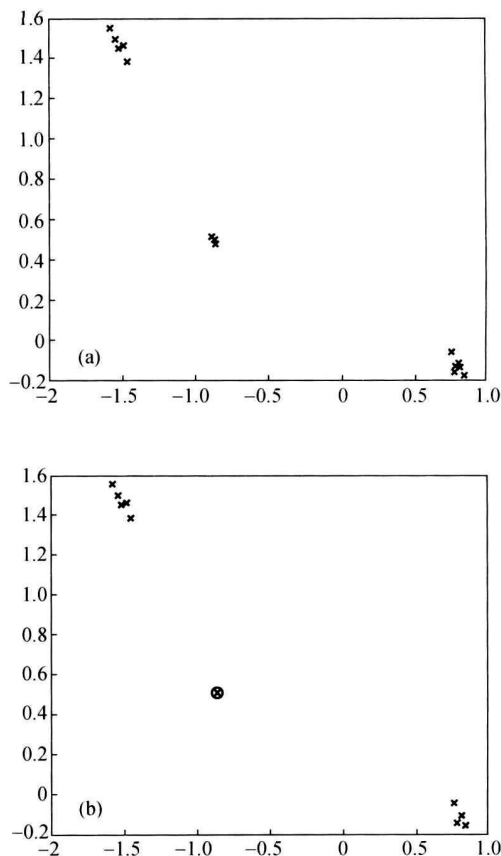


图 3 层次聚类法求目标轨道平面(前 6 个时刻)

(a) 平面模式聚类前情况; (b) 平面模式聚类结果

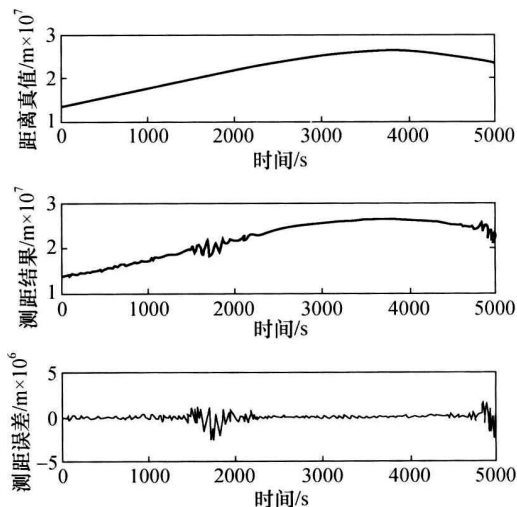


图 4 测距结果与距离真值对比

(a) 距离真值; (b) 测距结果; (c) 测距误差(测距结果与距离真值相减)

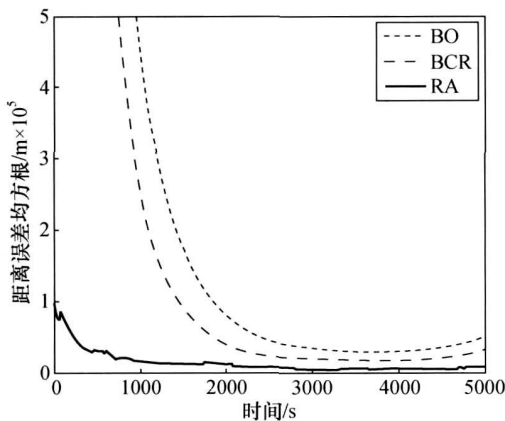


图 5 跟踪滤波结果

确性和有效性。与经典的 BO 定位法和 BCR 定位法相比, RA 定位法具有更高的跟踪精度, 尤其突出的是收敛速度有很大的提高, 可以对目标快速定位。从图 5 中可以明显看到 RA 定位跟踪曲线从高的初值误差迅速下降至一个小值。另外, 由于滤波初值是计算得到, 所以 RA 方法不存在对滤波初值敏感问题。RA 定位法充分利用了目标相对观测器的相对运动信息, 且由于解决了测距问题从而可以即时得到目标位置, 所以, 具有很好的跟踪精度和收敛速度。需要注意的是, RA 定位法测量的参数较多, 且有一定的精度要求, 其具有的上述良好特性是以增加系统复杂度为代价的。

6 结论

在对卫星目标的星载单站无源定位中, 在角度和角度变化率测量基础上增加径向速度和离心加速度信息后, 当目标卫星轨道和观测卫星轨道不共面时, 能够通过直接测算目标距离进而确定其位置。与已有的仅测角法和测角及角度变化率法等基于几何定位原理的定位方法相比, 基于运动学原理的该方法定位精度更高、收敛速度更快且对滤波初值不敏感, 可以实现快速测距定位。

参 考 文 献

1 Gershonoff H. Experimental passive range and aoa system shows promise. *Journal of Electronic Defence*, 1992, 15(12): 31—33

2 Ho KC, Chan YT. An asymptotically unbiased estimator for bearings-only and doppler-bearing target motion analysis. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2006, 54(3): 809—822

3 孙仲康, 周一宇, 何黎星. 单/多基地有源无源定位技术. 北京: 国防工业出版社, 1996 196—197

4 乔凯, 王治乐, 从明煜. 空间目标天基与地基监视系统对比分析. *光学技术*, 2006(5): 744—746

5 Liu YC, Liu L. Orbit determination using satellite-to-satellite tracking data. *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, 2001, 1(3): 281—286

6 Vonbun FO, Argentiero PD, Schmid PE. Orbit determination accuracies using satellite-to-satellite tracking. *IEEE Trans on AES*, 1978, AES-14(6): 834—842

7 Rao JR, Sinha NK. On the orbit determination problem. *IEEE Trans on AES*, 1985, AES-21(3): 274—291

8 卢占坤, 荆胜利. 空间电子对抗基本现状和发展展望. 桂林: 中国电子学会电子对抗分会第十三届学术年会论文集, 2003, 56—59

9 郭福成, 樊昀. 空间信息对抗中的单星对卫星无源定位跟踪方法. *宇航学报*, 2005, 26(2): 196—200

10 Steven CN, Vicent JA. Observability criteria for bearing-only target motion analysis. *IEEE Trans on AES*, 1981, AES-17(2): 162—166

11 Taff LG. Target location from bearing-only observation. *IEEE Trans on AES*, 1997, 33(1): 2—9

12 Li Q, Guo FC, Li J, et al. Research of satellite-to-satellite passive tracking using bearings-only measurements in J2000 ECI frame. 2006 CIE International Conference on Radar. Shanghai, 2006, 41—44

13 Peggy J Galkowski, Mohammed Islam. An alternative derivation of modified gain function of Song and Speyer. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1322—1326

14 Teak L Song, Jason Speyer. A stochastic analysis of a modified gain extended kalman filter with applications to estimation with bearings only measurements. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1985, 30(10): 940—949

15 李强, 郭福成. 单星对卫星的仅测角被动定轨跟踪方法研究. *国防科技大学学报*, 2007, 29(2): 70—75

16 孙仲康. 基于运动学原理的无源定位技术. *制导与引信*, 2001, 22(1): 40—44

17 刘林. 航天器轨道理论. 北京: 国防工业出版社, 2000

18 孙即祥. 现代模式识别. 长沙: 国防科技大学出版社, 2002, 28—30

19 刘福声, 罗鹏飞. 统计信息处理. 长沙: 国防科技大学出版社, 1999, 34—37